Der mathematische Werkzeugkasten

Georg Glaeser

Der mathematische Werkzeugkasten

Anwendungen in Natur und Technik

5. Auflage

Springer Spektrum

Georg Glaeser
Abteilung für Geometrie
Universität für Angewandte Kunst Wien
Wien, Österreich

ISBN 978-3-662-63260-4 ISBN 978-3-662-63261-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63261-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Einleitung

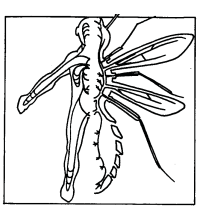
Mathematik ist die „Wissenschaft von den Zahlen und Figuren“[1] und hat eine fast dreitausendjährige Tradition. Viele Erkenntnisse, die in diesem Buch aufgearbeitet werden, sind seit Jahrhunderten bekannt. Ein großer Teil der mathematischen Einsichten entstand aus dem Bedürfnis des Menschen, Erklärungen für gewisse Erscheinungen zu finden, und diese auch vorausberechnen zu können.

Ohne diese Neugierde, die unserer Spezies angeboren zu sein scheint, wären viele der Erkenntnisse, die in diesem Buch behandelt werden, vielleicht nie gewonnen worden. Historisch gesehen hat es sehr lange gedauert, diese Erklärungen in der Sprache der Wissenschaft zu formulieren und ihnen damit eine tatsächliche Vorhersagekraft zu verleihen.

Eine schöne Umschreibung nennt die Mathematik einen „in sich abgeschlossenen Mikrokosmos, der jedoch die starke Fähigkeit zur Widerspiegelung und Modellierung beliebiger Prozesse des Denkens und wahrscheinlich der gesamten Wissenschaft überhaupt besitzt“[2].

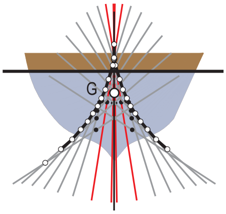
Mathematische Fragen und der Einsatz des Computers

Es gab eine kurze Zeit, in der manche Menschen dachten, dass der Computer die Mathematik teilweise ersetzen könne. Aber Mathematik besteht nicht darin, Rechenoperationen durchführen zu können, sondern im logischen Denken, das hinter diesen Operationen steckt. Die Frage ist nicht *wie*, sondern *warum* ich diese oder jene Operation durchführen muss. Ist dies geklärt, beginnt die oft langwierige Ausführung der Rechenoperationen. Dafür ist der Computer ein Segen. Er erlaubt es, den ganzen Ballast der Routineoperationen abzuladen und den Kopf für das Verständnis der Zusammenhänge frei zu bekommen. Und neue, komplexere Themen anzupacken, bei denen – wie sich meist herausstellt – auch „nur mit Wasser gekocht wird“.

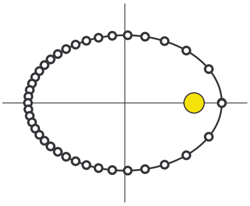


Wieso gibt es eine Obergrenze für die Größe von Insekten und eine Untergrenze für die Größe von Warmblütern? Die Antwort darauf ergibt sich aus einem wichtigen Satz über ähnliche Objekte.

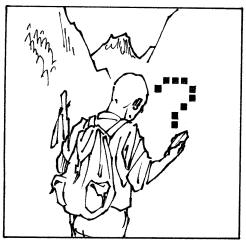
[1] Brockhaus, Wiesbaden 1971.
[2] *Marc Kac*, *Stanislaw Ulam*: *Mathematics and Logic*, Dover Publ., 1992.



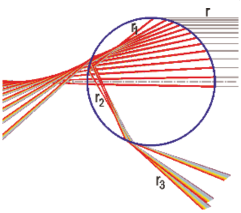
Wann und warum kippt ein Schiff u.U. um? Dies ist eine typische Aufgabe für die Vektorrechnung.



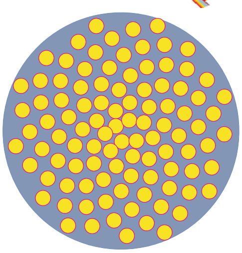
Was bedeutet der *Kepler*sche Flächensatz für unsere Jahreszeiten? Dazu brauchen wir Kenntnisse über Winkelfunktionen und Ellipsen.



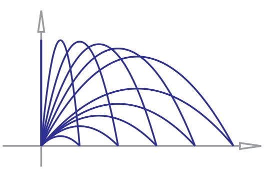
Wie funktioniert GPS (=„Global Positioning System“)? Wie viele Satelliten braucht man zur Positionsbestimmung und wie verteilen sich deren Bahnen um die Erde möglichst flächendeckend? Wann muss man mit Navigationsproblemen rechnen? In diesem Fall kommt die analytische Geometrie zum Zug.



Wie entsteht ein Regenbogen? Warum sieht man die untergehende Sonne als glühend roten Feuerball, obwohl sie eigentlich gar nicht mehr da sein dürfte? In beiden Fällen spielt die Lichtbrechung eine Rolle, die mithilfe der Differentialrechnung erklärt wird.



Wie sind die seltsamen Spiralen auf Sonnenblumen, die beeindruckenden Formen von Antilopenhörnern oder die wunderbar geometrische Form der Schneckenhäuser zu erklären? Dazu brauchen wir Kenntnisse über Exponentialfunktionen.



Wie muss man einen Rasensprenger bewegen, damit der Rasen gleichmäßig bewässert wird? Wie viel Luft verbraucht ein Taucher bei einem Multi-Level-Tauchgang? Wie groß ist die Lebenserwartung für Personen, die schon ein gewisses Alter erreicht haben? Die Integralrechnung gibt die Antwort.

Warum schlägt das menschliche Herz „absichtlich“ leicht unregelmäßig und wie kann man nach Auszählung von 10% der Wählerstimmen das Wahlergebnis schon recht genau voraussagen? Hier brauchen wir das „Gesetz der großen Zahlen“ und die beurteilende Statistik.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Wie wurden die mathematischen Proportionen klingender Saiten erstmals von Pythagoras definiert, und wie wurden Tonskalen und Tonsysteme im Verlauf der Musikgeschichte verändert? Diesmal geht es um Proportionen, die nicht nur mathematisch sinnvoll sind, sondern auch von den Menschen als „harmonisch" beurteilt werden.

Und nicht zuletzt: Wie berechnet eigentlich der Computer die komplizierten Funktionsausdrücke, und wann kann man sich unter Umständen nicht auf die vermeintliche Genauigkeit verlassen?

Besonders anschaulich werden die Dinge oft, wenn man „Animationen" davon sieht. Wenn man ein schaukelndes Schiff als Spielball der Elemente am Computerbildschirm mitverfolgen kann und erkennt, welche Drehmomente es immer wieder aufrichten. Oder wenn man beobachtet, wie ein Planet beschleunigt, um nicht von der Sonne verschluckt zu werden, oder wenn man das Horn einer Antilope wachsen sieht, bis es die Form angenommen hat, die durch Fotos aus verschiedenen Positionen vorgegeben ist. Solche Simulationen sind erst durch die moderne Computertechnologie möglich. Aber die Mathematik, die dahintersteckt, ist immer dieselbe!

Die Leitlinien dieses Buches

Das vorliegende Buch hat seine Wurzeln in der Vorlesung *Angewandte Mathematik*, die ich seit einigen Jahren für Studierende der Architektur und des Industrial Design an der Universität für Angewandte Kunst in Wien abhalte. Es ist aber so gestaltet, dass es darüber hinaus für alle interessant sein soll, die an Zusammenhängen zwischen der Mathematik und den verschiedensten Disziplinen interessiert sind. Es soll helfen, das bisher angeeignete mathematische Wissen neu zu strukturieren und in die Praxis umzusetzen.

Es handelt sich um keinen Mathematik-Lehrgang im klassischen Sinn, in dem Definitionen, Sätze und deren Beweise aneinandergereiht werden. Viele Anwendungsbeispiele schaffen Querverbindungen zu verschiedenen, nicht immer technisch-physikalischen Gebieten, wie etwa zur Biologie, Geografie, Archäologie, Medizin, Musik, Bildenden Kunst usw. Dies soll die Aufmerksamkeit für Gesetzmäßigkeiten in Natur und Kunst erhöhen.

Es wurde versucht, ein möglichst *in sich geschlossenes Skriptum* zu erstellen, und zwar für eher pragmatisch denkende LeserInnen und nicht für puristische Mathematiker. Dabei wurden folgende Leitlinien befolgt:

- Jedes Kapitel enthält neben einer knappen Einführung in die Theorie zahlreiche Anwendungsbeispiele. Eine gründliche theoretische Ausbildung hilft nämlich oft nicht, wenn das darin enthaltene mathematische Problem erst selbst erkannt werden muss.
- Auf eine allzu mathematische Ausdrucksweise wurde verzichtet, weil Studierende dadurch oft vom Wesentlichen abgelenkt werden. Wenn einmal

die wesentliche Aussage eines Satzes verstanden wurde, kann man immer noch auf Feinheiten eingehen.

- Beweise werden wohl konsequent geführt, allerdings wird immer wieder auf die „Herleitung“ von Sachverhalten mittels Hausverstand hingewiesen.
- Die geometrisch-anschauliche Skizze wird der mathematischen Abstraktion vorgezogen. Höherdimensionale Probleme werden Sie in diesem Buch nur selten finden.
- Der allgemeine Lösungsweg hat – selbst wenn er manchmal aufwändiger ist – stets Vorrang vor Sonderfällen und deren Spitzfindigkeiten. So gelten etwa kompliziertere Gleichungen der Form $f(x) = 0$ oder bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)dx$ als „gelöst“, weil die Ergebnisse immer beliebig genau mit dem Computer angenähert werden können.
- Literaturangaben werden um einschlägige Internet-Adressen erweitert. Studierende haben heutzutage nämlich einen wesentlich bequemeren Zugang zum Internet als zur Uni-Bibliothek!

Der Aufbau des Buches

Der Inhalt wurde auf wenige ausgewählte Kapitel reduziert:

- Zunächst werden einfache *Grundlagen* der angewandten Mathematik an Hand praktischer Beispiele wiederholt. Insbesondere werden einfache algebraische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme behandelt.
- Im nächsten Kapitel werden *Proportionen* mittels zahlreicher Beispiele besprochen. Insbesondere werden ähnliche Körper untersucht und dabei einfache, aber keineswegs triviale Erkenntnisse gewonnen, die in der Natur enorme Auswirkungen haben.
- Das dritte Kapitel ist den Berechnungen im rechtwinkligen und schiefwinkeligen Dreieck – und somit den *Winkelfunktionen* – gewidmet. Auch hier gibt es eine Fülle von Anwendungen in den verschiedensten Gebieten.
- Immer noch mit den Mitteln der Elementarmathematik wird dann relativ ausführlich die *Vektorrechnung* behandelt. Diese spielt in der Physik eine große Rolle, ist aber auch der Schlüssel für die Anwendung geometrischer Probleme am Computer und hat in den letzten Jahren enorm an Bedeutung gewonnen. Die dadurch erzielte Eleganz – und damit Einfachheit – der Berechnungen wird an vielen Anwendungsbeispielen illustriert.
- Im fünften Kapitel werden die klassischen *reellen Funktionen und deren Ableitungen* besprochen. Sie sind ebenso von großer Bedeutung für zahlreiche Berechnungen und haben durch den Einsatz des Computers jeden Schrecken verloren.
- Im sechsten Kapitel wird auf wichtige *Kurven und Flächen* eingegangen. Insbesondere sind dies Ortslinien und Bahnkurven von sog. geometrischen Zwangläufen. Dabei wird der Computer als das entsprechende Werkzeug zu deren Darstellung herangezogen. Die entsprechende Software wurde an der Universität für angewandte Kunst in Wien entwickelt. Auf der Webseite zum Buch (`www.uni-ak.ac.at/math`) finden Sie dutzende ausführbare Demo-Programme. Dadurch kann die Kreativität und das *sinnvolle* Umgehen mit moderner Soft-

ware gefördert werden. Beim Arbeiten am Computer sollten stets die Ergebnisse abgeschätzt und der Hausverstand miteinbezogen werden.

- Im siebten Kapitel wird auf einfache und wichtige *Anwendungen der Differential- und Integralrechnung* eingegangen. Komplizierte Auswertungen werden ebenfalls mehr oder weniger dem Computer überlassen. Dafür bleibt ein wenig Zeit, um das Verständnis für die allgemeinen Formeln zur Berechnung von Flächen, Schwerpunkten usw. zu fördern.
- Das letzte Kapitel beschäftigt sich schließlich mit Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Aufgabengebiete haben in letzter Zeit stark an Bedeutung zugenommen. Neben der beschreibenden Statistik legen wir – mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung – auf die Datenanalyse wert. Es geht also um die Kunst, aus Daten zu lernen.
- Im Anhang schließlich wird auf einige Themen eingegangen, die nicht unmittelbar in den Lehrgang einzuordnen sind. Dazu zählen die *komplexen Zahlen*, *Fibonacci-Zahlen* und das Thema *Musik und Mathematik*.

Mittlerweile ist das Buch in mehreren Auflagen erschienen, zuletzt in der englischen Ausgabe

- G. Glaeser: *Math Tools*, Springer International, London, 2017.

Die eine oder andere Textstelle bzw. die eine oder andere Abbildung sind bereits in einem der folgenden Bücher zu finden:

- G. Glaeser: *Nature and Numbers*, Ambra V/De Gruyter, Wien 2014
- G. Glaeser, H.F. Paulus: *Die Evolution des Auges.* Springer Nature, Heidelberg 2014
- G. Glaeser, K. Polthier: *Bilder der Mathematik*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2. Auflage, 2014
- G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics. From the ancient Greeks to 21st century developments.* Springer Spektrum, 2016.
- G. Glaeser, H.F. Paulus, W. Nachtigall: *Die Evolution des Fliegens.* Springer Nature, Heidelberg, 2016
- G. Glaeser, W. Nachtigall: *Die Evolution biologischer Makrostrukturen.* Springer Nature, Heidelberg, 2017
- G. Glaeser, M. Roskar: *Mathematik mit Humor.* De Gruyter, Wien 2019.
- G. Glaeser: *Geometry and Its Applications in Art, Nature and Technology*, Springer Nature Switzerland, 2020

Über die Exaktheit der Mathematik

Folgender typische „Mathematiker-Witz“ zeigt uns das Selbstverständnis der Mathematik:
Ein Ingenieur, ein Philosoph und ein Mathematiker fahren im Zug über eine schottische Hochebene und erkennen in einer Schafherde ein schwarzes Schaf. Sagt der Ingenieur: „Ich habe gar nicht gewusst, dass es in Schottland schwarze Schafe gibt.“ Korrigiert ihn der Philosoph: „Moment! So einfach kann man das nicht sagen. Es muss heißen: Ich habe gar nicht gewusst, dass es in Schottland *mindestens ein* schwarzes Schaf gibt.“

Daraufhin der Mathematiker: „Meine Herren, auch das ist nicht exakt genug. Es muss heißen: Ich habe gar nicht gewusst, dass es in Schottland *mindestens ein* Schaf gibt, das auf *mindestens einer Seite* schwarz ist…“
Die reine Mathematik sieht sich also sehr exakt. Der praktische Anwender der Mathematik (z.B. der Ingenieur) sieht die Dinge eher pragmatisch, um möglichst schnell zu verwertbaren Ergebnissen zu kommen. Die Wahrheit liegt wohl in der Mitte…

Danksagungen

Ein gutes Buch ist das Resultat jahrelanger Vorarbeiten. Diese geschehen immer in Interaktion mit anderen Personen. Fast alle Computerzeichnungen und mathematischen Skizzen in diesem Buch wurden mit dem von mir entwickelten Programmierpaket „Open Geometry“ (G. Glaeser, H. Stachel: *Open Geometry. Open GL + Advanced Geometry.* Springer New York, 1997) erstellt. Eigentlich wurde Open Geometry zunächst überhaupt zu diesem Zweck ins Leben gerufen, hat sich dann aber in Eigendynamik weiterentwickelt.
Meine Tochter Sophie und meine allesamt sportlichen Nichten und Neffen sind auf diversen Fotos zu sehen. Sophie hat auch einige Zeichnungen und Fotografien beigesteuert. Für das Einbringen interessanter Beispiele bzw. die Mithilfe bei der Korrektur danke ich in alphabetischer Ordnung und unter Verzicht aller akademischen Titel:
Reinhard *Amon* (er hat den „musikalischen Teil“, nämlich das theoretische Gerüst von Anhang B, beigesteuert), Andreas *Asperl*, Thomas *Backmeister*, Christian *Clemenz*, Wilhelm *Fuhs*, Johannes *Glaeser* und Othmar *Glaeser* (meinen beiden Brüdern), Franz *Gruber*, Gregor *Holzinger*, Gerhard *Karlhuber*, Irene *Karrer*, Franz *Kranzler*, Herbert *Löffler*, Marianne *Meislinger*, Thomas *Müller*, Boris *Odehnal* und Markus *Roskar* (von ihm stammen viele handgezeichneten Illustrationen), Günter *Wallner* und Stefan *Wirnsperger* (die meisten colorierten Zeichnungen).
Schließlich möchte ich auch all jenen Studierenden danken, die immer wieder mit großer Begeisterung bei der Sache waren und durch Diskussionen wichtige Beiträge zum Buch geliefert haben. Sie haben mir stets das Gefühl gegeben, dass die Mathematik, wenn sie mit Begeisterung vorgetragen wird, nicht nur einer Elite vorbehalten ist, sondern eigentlich jeden anspricht. Die Scheu vor dem „gefürchteten Fach“ Mathematik, die vielleicht noch in manchen von uns steckt, weicht bald einer angenehmen Atmosphäre des „Mehr-wissen-wollens“.

Wien, im Februar 2021

Inhaltsverzeichnis